

# 湖北省高中名校联盟 2023 届高三第三次联合测评

## 数学试卷参考答案与评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	B	A	B	D	C	C	BC	BD	ACD	BD

### 一、选择题

1.【答案】 C

【解析】 由题意可知  $z = -1 + i$ , 所以  $\frac{z}{1+i} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{2} = i$ , 故选 C.

2.【答案】 D

【解析】 对 A:  $\log_2(x+1) \leq 2 = \log_2 4$ , 所以  $0 < x+1 \leq 4$ , 故  $-1 < x \leq 3$ ;

对 B:  $\frac{x^2-x+2}{x} > 0$ , 所以  $x(x^2-x+2) = x\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right] > 0$ , 故  $x > 0$ ;

所以  $A \cap B = \{x | 0 < x \leq 3\}$ , 故选 D.

3.【答案】 B

【解析】 对 A, 若  $am^2 \geq bm^2$  中,  $m=0$  时  $a < b$  也成立, 故 A 错;

对 B, 当  $x = \frac{3}{4}\pi$  时,  $\tan x = -1$ , 故  $\tan x \neq 1$ , 若  $\tan x = 1$ , 则  $x = \frac{(4k+1)\pi}{4}$ , 故 B 对;

对 C, 存在量词命题的否定是  $\forall x \in \mathbf{R}, x + \frac{1}{x} < 2$ , 故 C 错;

对 D, 若  $xy=1$ ,  $x, y$  均为负数, 则  $\lg x, \lg y$  无意义, 故 D 错.

4.【答案】 A

【解析】  $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$ , 得  $\frac{2\sin \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{2 - \sin \alpha}$ ,

所以  $4\sin \alpha - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ , 所以  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ , 又  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ , 故选 A.

5.【答案】 B

【解析】 参加音乐社社团或者脱口秀社团的同学共有 35 名, 占这五个社团总人数的 35%, 所以高一年级参加这五个社团总人数为  $\frac{35}{35\%} = 100$  名, 故 AD 均错, 脱口秀社团的人数占这五个社团总人数占

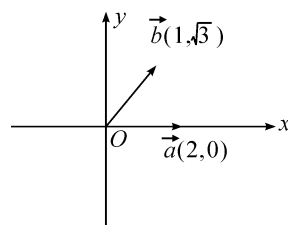
比为  $\frac{20}{100} = 20\%$ , 故 B 对, 参加这五个社团总人数占全年级人数的占比为  $\frac{100}{1200} = \frac{1}{12} \approx 8.33\%$ , 故 C 错.

6.【答案】 D

【解析】 由  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \vec{a} \cdot \vec{b} = 2$  可知  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{3}$ , 如图建立坐标系,

$\vec{a} = (2, 0)$ ,  $\vec{b} = (1, \sqrt{3})$ , 设  $\vec{c} = (x, y)$ , 由  $(\vec{b} - \vec{c}) \cdot (2\vec{b} - \vec{c}) = 0$  可得:

$(1-x, \sqrt{3}-y) \cdot (2-x, 2\sqrt{3}-y) = x^2 - 3x + 2 + y^2 - 3\sqrt{3}y + 6 = 0 \Rightarrow$



$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1,$$

所以  $\vec{c} = (x, y)$  的终点在以  $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$  为圆心, 1 为半径的圆上, 所以  $|\vec{a} - 2\vec{c}| = 2 \left| \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c} \right|$ , 几何意义为

$(x, y)$  到  $(1, 0)$  距离的 2 倍, 由几何意义可知  $|\vec{a} - 2\vec{c}|_{\max} = 2 \left[ \sqrt{\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} + 1 \right] = 2\sqrt{7} + 2$ , 故

选 D.

## 7.【答案】 C

【解析】  $\triangle POF_2$  是面积为  $2\sqrt{3}$  的正三角形, 即  $S = \frac{1}{2} \times c \times c \times \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ , 所以  $c^2 = 8, c = 2\sqrt{2}$ ,

所以  $P(\sqrt{2}, \sqrt{6})$ , 所以  $\frac{2}{a^2} - \frac{6}{b^2} = 1$ , 又  $a^2 + b^2 = 8$ , 所以  $b^2 = 4\sqrt{3}$ , 故选 C.

## 8.【答案】 C

【解析】 记  $f(x) = e^x - 1 - x, (x \geq 0)$ , 因为  $f'(x) = e^x - 1$ , 当  $x > 0$  时,  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以当  $x > 0$  时,  $f(x) = e^x - 1 - x > f(0) = 0$ , 即  $e^x - 1 > x$ , 取  $x = 0.05$ , 所以  $e^{0.05} - 1 > 0.05$ ,

05, 记  $g(x) = \ln(x+1) - x, (x \geq 0)$ , 因为  $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} < 0$ , 所以  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 所以当  $x > 0$  时,  $g(x) < g(0) = 0$ , 即  $\ln(1+x) < x$ , 取  $x = 0.05$ , 所以  $\ln 1.05 < 0.05$ , 故  $\ln 1.05 < e^{0.05} - 1$ ;

记  $h(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{1+x}, (x \geq 0)$ , 因为  $h'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$ , 当  $x > 0$  时,  $h'(x) > 0$ , 所以  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以当  $x > 0$  时,  $h(x) > h(0) = 0$ , 即  $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$ , 取

$x = 0.05$ , 所以  $\ln 1.05 > \frac{0.05}{1+0.05} = \frac{5}{105} = \frac{1}{21}$ , 故选 C.

## 二、多项选择题

### 9.【答案】 BC

【解析】  $f(x) = -2\sin^2 x + \sin 2x + 1 = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

对 A,  $f(x)$  的图象可由  $y = \sqrt{2}\sin 2x$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{8}$  个单位长度得到, 故 A 错;

对 B,  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{8}\right)$  上,  $2x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ , 函数  $f(x)$  单调递增, 故 B 对;

对 C, 令  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ , 可得  $2x + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbf{Z}, x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ , 当  $k = 1, 2$  时  $x \in [0, \pi]$ , 故 C 对;

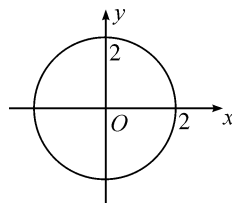
对 D,  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ , 所以  $2x + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ,  $\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)_{\max} = 1$ , 此时  $x = 0$ , 故 D 错;

综上所述, 选 BC.

### 10.【答案】 BD

【解析】 对 A, 若  $|AB| = 2\sqrt{3}$ , 又  $|OA| = |OB| = 2, \angle AOB = \frac{2\pi}{3}$ , 故 A 错;

对 B, 若点 O 到直线 AB 的距离为  $\sqrt{2}$ , 由勾股定理知  $\frac{1}{2}|AB| = \sqrt{2}$ , 故 B 对;



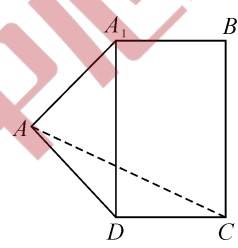
对 C,  $|x_1 + y_1 - 1| + |x_2 + y_2 - 1| = \sqrt{2} \left( \frac{|x_1 + y_1 - 1|}{\sqrt{2}} + \frac{|x_2 + y_2 - 1|}{\sqrt{2}} \right)$ , 几何意义为  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  到直线  $x + y - 1 = 0$  的距离之和的  $\sqrt{2}$  倍, 设  $AB$  中点为  $Q$ ,  $|x_1 + y_1 - 1| + |x_2 + y_2 - 1| = 2\sqrt{2} \times \frac{|x_Q + y_Q - 1|}{\sqrt{2}}$ , 而  $AB$  中点  $Q$  的轨迹为  $O: x^2 + y^2 = 2$ , 所以  $\left( \frac{|x_Q + y_Q - 1|}{\sqrt{2}} \right)_{\max} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ , 所以  $|x_1 + y_1 - 1| + |x_2 + y_2 - 1|$  的最大值为 6, 故 C 错;

对 D,  $x_1 x_2 + y_1 y_2 = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2 \times 2 \times \cos \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle$  的最小值为 -4, 故 D 对;

综上所述, 选 BD.

### 11. 【答案】 ACD

【解析】 对 A, 在  $\triangle BA_1 D$  中边长为面对角线  $2\sqrt{2}$ ,  $BP$  的最小值为  $\triangle BA_1 D$  的高, 其值为  $\sqrt{6}$ , 故 A 对;

对 B, 将  $\triangle AA_1 D$  与矩形  $\triangle A_1 B_1 CD$  翻折到一个平面内 (如图),  


在  $\triangle ACD$  中, 余弦定理可得,  $AC^2 = 4 + 4 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos 135^\circ = 8 + 4\sqrt{2}$ ,

所以  $AC = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ , 故 B 错;

对 C, 因为  $V_{B_1-ACP} = V_{A-B_1PC}$ , 而 A 到平面  $PB_1C$  的距离不变, 而  $\triangle B_1PC$  的面积也不变, 所以三棱锥  $B_1-ACP$  的体积不变, 故 C 对;

对 D, 以点 B 为球心与面  $AB_1C$  的交线为圆周, 该圆锥的母线长为 2, 高为  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ , 底面半径  $r =$

$\sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ , 所以交线长为  $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ , 故 D 对;

综上所述, 选 ACD.

### 12. 【答案】 BD

【解析】 假设数列  $\{a_n\}$  为等比数列, 设其公比为  $q$ , 则  $a_2^2 = a_1 a_3$ , 即  $\left(\frac{9}{S_2}\right)^2 = \frac{81}{S_1 S_3}$ ,

所以,  $S_2^2 = S_1 S_3$ , 可得  $a_1^2(1+q)^2 = a_1^2(1+q+q^2)$ , 解得  $q=0$ , 不合乎题意, 故数列  $\{a_n\}$  不是等比数列, 故 A 错;

当  $n \geq 2$  时,  $a_n = \frac{9}{a_n} - \frac{9}{a_{n-1}} = \frac{9(a_{n-1} - a_n)}{a_n a_{n-1}} > 0$ , 可得  $a_n < a_{n-1}$ , 所以, 数列  $\{a_n\}$  为递减数列, 故 B 对;

由题意可知,  $\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n > 0$ , 当  $n=1$  时,  $a_1^2 = 9$ , 可得  $a_1 = 3$ ; 由 B 数列  $\{a_n\}$  为递减数列, 故 C 错;

假设对任意的  $n \in \mathbf{N}^*, a_n \geq \frac{1}{2^{023}}$ , 则  $S_{10 \times 2^{023} \times 2^{023}} \geq 10 \times 2^{023} \times 2^{023} \times \frac{1}{2^{023}} = 20^{230}$ ,

所以,  $a_{10 \times 2^{023} \times 2^{023}} = \frac{9}{S_{10 \times 2^{023} \times 2^{023}}} \leq \frac{9}{20^{230}} < \frac{1}{2^{023}}$ , 与假设矛盾, 假设不成立, 故 D 对.

故答案为: BD.

### 三、填空题

#### 13. 【答案】 100

【解析】  $(x+y)^5(1+x)^6$  中只有  $(x+y)^5$  的展开式中才含有  $y^4$ , 故  $(x+y)^5$  中的项  $C_5^1 xy^4$  与  $(1+x)^6$  展开式中的  $x^3$  相乘得到,  $(1+x)^6$  展开式中  $x^3$  项的系数为  $C_6^3 x^3$ , 故  $x^4 y^4$  的项的系数为  $C_5^1 \cdot C_6^3 = 100$ .

#### 14. 【答案】 3

【解析】  $\because |AF| = 2, |BF| = 6, \therefore |AB| = 4, \frac{|AB|}{|BF|} = 2, \therefore x_A = \frac{p}{6}$ ,



由  $1 < a \leq 2$  知  $t = a^{1+x} \in (0, a)$ , 得  $\frac{t}{a} \in (0, 1)$ ,  $\log_a(\frac{t}{a}) < 0$

从而需证:  $\log_a \frac{t}{a} + 1 \geq (\log_a t - 1) \cdot \log_a(2-t)$

即需证明:  $\frac{\ln t}{\ln a} + \frac{\ln(2-t)}{\ln a} - \frac{\ln t}{\ln a} \cdot \frac{\ln(2-t)}{\ln a} \geq 0$ , 记  $\ln a = b \in (0, \ln 2]$

从而只需证:  $h(t) = b[\ln t + \ln(2-t)] - \ln t \cdot \ln(2-t) \geq 0$  ..... \*

而  $h'(t) = b(\frac{1}{t} - \frac{1}{2-t}) - (\frac{1}{t} \ln(2-t) + \ln t \cdot \frac{-1}{2-t}) = \frac{1}{t}[b - \ln(2-t)] + \frac{1}{2-t}[\ln t - b]$ ,  $h'(1) = 0$

$h''(t) = \frac{1}{t^2}[\ln \frac{2-t}{2} + \frac{2}{2-t} - 1 + (\ln 2 - b)] + \frac{1}{(2-t)^2}[\ln \frac{t}{2} + \frac{2}{t} - 1 + (\ln 2 - b)]$

由于  $\ln x + \frac{1}{x} - 1 \geq 0$ ,  $\ln 2 - b \geq 0$ , 则  $h''(x) \geq 0$

$\therefore h'(t)$  在  $(0, a)$  上递增, 又  $h'(1) = 0$

$\therefore$  在  $0 < t \leq 1$ ,  $h'(t) < h'(1) = 0$ ,  $h(t)$  递减,  $h(t) \geq h(1)$

$1 \leq t < a$ ,  $h'(t) > h'(1) = 0$ ,  $h(t)$  递增,  $h(t) \geq h(1)$

而  $h(1) = 0$ , 从而在  $1 < t < a$  时总有  $h(t) \geq h(1) = 0$

$\therefore (*)$  式恒成立, 不等式  $a^{1+x} + a^{1+\frac{1}{x}} \leq 2$  得证。

综上所述,  $a \in (1, 2]$ .

#### 四、解答题

17. 【解析】 (1) 在  $\triangle ABD$  中, 由余弦定理得:  $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos B$ ,

所以  $49 = 81 + BD^2 - 2 \times 9 \times BD \times \frac{2}{3}$ , 解得  $BD = 8$  或  $BD = 4$ ; ..... (4 分)

(2) 在  $\triangle ABD$  中, 过  $D$  作  $AB$  的平行线交  $AC$  于  $E$ ,

在  $\triangle AED$  中,  $ED = \frac{1}{2}AB = \frac{9}{2}$ , 又  $\angle BAC + \angle AED = \pi$ , 所以  $\cos \angle AED = \frac{2}{3}$ . ..... (6 分)

由余弦定理得:  $\cos \angle AED = \frac{AE^2 + ED^2 - AD^2}{2 \cdot AE \cdot ED} = \frac{2}{3}$ , ..... (8 分)

所以  $EA^2 - 6EA - \frac{115}{4} = 0$ , 所以  $EA = 3 + \frac{\sqrt{151}}{2}$ , 故  $AC = 6 + \sqrt{151}$ . ..... (10 分)

18. 【解析】 (1) 依题意, 正项数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1^2 = 1$ , 即  $a_1 = 1$ , ..... (1 分)

当  $n \geq 2$  时,  $a_n = S_n - S_{n-1}$ , 即  $2S_n = S_n - S_{n-1} + \frac{1}{S_n - S_{n-1}}$ , ..... (2 分)

整理得  $S_n^2 - S_{n-1}^2 = 1$ , 又  $S_1^2 = a_1^2 = 1$ ,

因此, 数列  $\{S_n^2\}$  是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列, ..... (4 分)

则  $S_n^2 = n$ , 因为  $\{a_n\}$  是正项数列, 即  $S_n > 0$ , 所以  $S_n = \sqrt{n}$ . ..... (5 分)

当  $n \geq 2$  时,  $a_n = S_n - S_{n-1} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ , 又  $a_1 = 1$  满足此式, 即  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ , 都有  $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ ; ...

..... (6 分)

(2) 不存在. .... (7 分)

由 (1) 中  $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$  可得:  $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$ , ..... (8 分)

假设存在满足要求的连续三项  $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}$ , 使得  $\frac{1}{a_k}, \frac{1}{a_{k+1}}, \frac{1}{a_{k+2}}$  构成等差数列, ..... (9 分)

则  $2(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})=(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})+(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1})$ , 即  $\sqrt{k+1}+\sqrt{k}=\sqrt{k-1}+\sqrt{k+2}$ , ..... (10 分)

两边平方, 得  $k+1+k+2\sqrt{k+1}\sqrt{k}=k-1+k+2+2\sqrt{k-1}\sqrt{k+2}$ , 即  $(k+1)k=(k-1)(k+2)$ ,  
整理得:  $k^2+k=k^2+k-2$ , 即  $0=-2$ , 显然不成立, 因此假设是错误的, ..... (11 分)

所以数列  $\{a_n\}$  中不存在使  $\frac{1}{a_k}, \frac{1}{a_{k+1}}, \frac{1}{a_{k+2}}$  构成等差数列的连续三项. .... (12 分)

19.【解析】 (1) 证明: 设  $AD=CD=BC=1$ ,

$\because AB//CD, \angle BCD=120^\circ, \therefore AB=2$ , ..... (1 分)

$\therefore AC^2=AB^2+BC^2-2AB \cdot BC \cdot \cos 60^\circ=3$ ,

$\therefore AB^2=AC^2+BC^2$ , 则  $BC \perp AC$ . .... (3 分)

$\because CF \perp$  平面  $ABCD, AC \subset$  平面  $ABCD$ ,

$\therefore AC \perp CF$ , 而  $CF \cap BC=C, CF, BC \subset$  平面  $BCF, \therefore AC \perp$  平面  $BCF$ .

$\because EF//AC, \therefore EF \perp$  平面  $BCF$ . .... (5 分)

(2) 以  $C$  为坐标原点, 分别以直线  $CA, CB, CF$  为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴建立如图

所示的空间直角坐标系, 设  $FM=\lambda(0 \leq \lambda \leq \sqrt{3})$ , 则  $C(0,0,0), A(\sqrt{3},0,0),$   
 $B(0,1,0), M(\lambda,0,1)$ , ..... (7 分)

$\therefore \overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0), \overrightarrow{BM}=(\lambda,-1,1)$ .

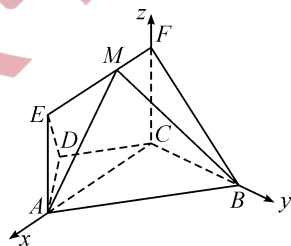
设  $\vec{n}=(x,y,z)$  为平面  $MAB$  的法向量,

由  $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}=0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BM}=0, \end{cases}$  得  $\begin{cases} -\sqrt{3}x+y=0, \\ \lambda x-y+z=0, \end{cases}$  取  $x=1$ , 则  $\vec{n}=(1, \sqrt{3}, \sqrt{3}-\lambda)$ . .... (9 分)

易知  $\vec{m}=(1,0,0)$  是平面  $FCB$  的一个法向量,

$\therefore \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{1}{\sqrt{1+3+(\sqrt{3}-\lambda)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\lambda-\sqrt{3})^2+4}}$ . .... (11 分)

$\because 0 \leq \lambda \leq \sqrt{3}, \therefore$  平面  $MAB$  与平面  $FCB$  夹角的余弦值的取值范围为  $\left[\frac{\sqrt{7}}{7}, \frac{1}{2}\right]$ . .... (12 分)



20.【解析】 (1) 由题可知 10 所学校, 参与“自由式滑雪”的人数依次为 27, 15, 43, 41, 32, 26, 56, 36, 49, 20,  
参与“单板滑雪”的人数依次为 46, 52, 26, 37, 58, 18, 25, 48, 32, 30,

其中参与“自由式滑雪”的人数超过 40 人的有 4 个, 参与“自由式滑雪”的人数超过 40 人, 且“单板滑雪”的人数超过 30 人的有 2 个.

设事件  $A$  为“从这 10 所学校中抽到学校至少有一个参与“自由式滑雪”的人数超过 40 人”

事件  $B$  为“从 10 所学校中选出的 3 所学校中参与“单板滑雪”的人数不超过 30 人”

则,  $P(A) = \frac{C_4^1 C_6^2 + C_4^2 C_6^1 + C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{100}{120}, P(AB) = \frac{C_2^1 C_2^2 + C_2^2 C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{4}{120}$ , ..... (4 分)

所以  $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{120}}{\frac{100}{120}} = \frac{1}{25}$ . .... (6 分)

(2) 由题意可得小明同学在一轮测试中为“优秀”的概率为

$P = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ , ..... (9 分)

所以小明在  $n$  轮测试中获得“优秀”的次数  $Y$  满足  $Y \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ ,

由  $E(Y) = n \cdot \frac{1}{2} \geq 3$ , 得  $n \geq 6$ .

所以理论上至少要进行 6 轮测试. .... (12 分)

21. 【解析】 (1)  $\because A\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  在椭圆上,  $\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$ , 有  $\frac{b^2}{a^2} + \frac{3}{4} = b^2$ , 所以  $b^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} - e^2$ ,

又  $\because 0 < e \leq \frac{1}{2}$ , 所以  $b^2 = \frac{7}{4} - e^2 \in \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right)$ ,  $\therefore 0 < b < a$ ,  $\therefore b \in \left[\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ ; .... (5 分)

(2) 由(1)可知  $b^2 = \frac{7}{4} - e^2$ , 又  $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $b > 0$ ,

所以  $b = 1, a = 2$ , 椭圆  $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

因为直线  $MN$  与  $x^2 + y^2 = 1$  相切, 故  $k_{MN} \neq 0$ .

若直线  $MN$  的斜率不存在, 不妨设直线  $MN$  为:  $x = 1$ ,

此时线段  $|MN| = \sqrt{3}$ .

若直线  $MN$  的斜率存在, 可设直线  $MN$  的方程为:  $y = kx + m (k \neq 0)$ .

由直线  $MN$  与  $x^2 + y^2 = 1$  相切, 故  $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$ , 可得:  $m^2 = 1 + k^2$ .

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \text{得 } (1+4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0, \text{ 所以 } x_1 + x_2 = -\frac{8km}{1+4k^2}, x_1 \cdot x_2 = \frac{4m^2 - 4}{1+4k^2},$$

$$\text{线段 } |MN| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{8km}{1+4k^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{4m^2 - 4}{1+4k^2}} = \frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2} \cdot \sqrt{4k^2m^2 - (1+4k^2)(m^2 - 1)} = \frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2} \cdot \sqrt{4k^2 + 1 - m^2}.$$

$$\text{又因为 } m^2 = 1 + k^2, \text{ 所以 } |MN| = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{(1+k^2) \cdot k^2}}{1+4k^2} = 4\sqrt{\frac{(1+k^2) \cdot 3k^2}{(1+4k^2)^2}} \leq \frac{4 \cdot \frac{1}{2}(1+4k^2)}{1+4k^2} = 2.$$

当且仅当  $3k^2 = k^2 + 1$ , 故当  $k^2 = \frac{1}{2}$  时,  $|MN|$  的最大值为 2. .... (11 分)

综上所述: 当  $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  时, 线段  $MN$  的最大值 2. .... (12 分)

22. 【解析】 (1) 当  $a = 1$  时,  $f(x) = e^x + x^2 - e$ ,  $f'(x) = e^x + 2x$ , 故  $f'(0) = e^0 + 2 \times 0 = 1$ ,  $f(0) = 1 - e$ , 故在点  $(0, f(0))$  处的切线方程为  $y = x + 1 - e$ . .... (3 分)

(2) 由题意知  $f'(x) = e^x + 2mx = 0$  有且只有一个根且  $f'(x)$  有正有负.

构建  $g(x) = f'(x)$ , 则  $g'(x) = e^x + 2m$ .

① 当  $m > 0$  时,  $g'(x) > 0$  当  $x \in \mathbf{R}$  时恒成立,  $g(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增,

因为  $g\left(-\frac{1}{2m}\right) = e^{-\frac{1}{2m}} - 1 < 0$ ,  $g(0) = 1 > 0$ ,

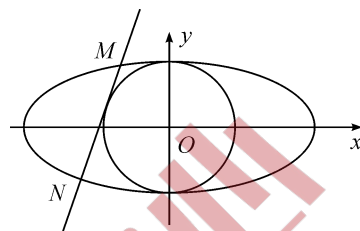
所以  $g(x)$  有一个零点, 即为  $f(x)$  的一个极值点;

② 当  $m = 0$  时,  $g(x) > 0$  当  $x \in \mathbf{R}$  时恒成立, 即  $f(x)$  无极值点;

③ 当  $m < 0$  时, 当  $x < \ln(-2m)$ ,  $g'(x) < 0$ ; 当  $x > \ln(-2m)$ ,  $g'(x) > 0$ ,

所以  $g(x)$  在  $(-\infty, \ln(-2m))$  单调递减, 在  $(\ln(-2m), +\infty)$  上单调递增,

故  $g(x)_{\min} = g(\ln(-2m)) = -2m + 2m \ln(-2m)$ ,



若  $g(x)_{\min} < 0$ , 则  $-1 + \ln(-2m) > 0$  即  $m < -\frac{e}{2}$ .

因为  $m < 0$ , 所以当  $x < 0$  时,  $g(x) > 0$ ,

当  $x > 0$  时,  $g(2\ln(-2m)) = 4m^2 + 4m\ln(-2m) = -4m[-m - \ln(-2m)]$ ,

令  $-m = t$ , 则  $s(t) = t - \ln(2t)$ ,  $t > \frac{e}{2}$ , 故  $s'(t) = \frac{t-1}{t} > 0$ ,

故  $s(t)$  在  $(\frac{e}{2}, +\infty)$  上为增函数, 故  $s(t) > s(\frac{e}{2}) = \frac{e}{2} - \ln \frac{e}{2} = \frac{e}{2} - 1 + \ln 2 > 0$ ,

故  $-2m[-2m - \ln(-2m)] > 0$ ,

故当  $m < -\frac{e}{2}$  时,  $g(x)$  有两个零点, 此时  $f(x)$  有两个极值点.

当  $g(\ln(-2m)) \geq 0$  时,  $g(x) \geq 0$  当  $x \in \mathbf{R}$  时恒成立, 即  $f(x)$  无极值点;

综上所述:  $m > 0$ . ..... (7 分)

(3) 由题意知, 对与任意的  $x \in \mathbf{R}$ , 使得  $f(x) \geq n$  恒成立, 则  $n \leq f(x)_{\min}$ , 当  $n = f(x)_{\min}$  时,  $m - n$  取到最小值.

当  $m = 0$  时,  $f(x) = e^x - e$ , 故  $n = -e$ , 所以  $m - n$  的最小值为  $e$ ;

当  $m < 0$  时, 当  $x < 0$  时,  $f(x) = e^x + mx^2 - e < mx^2 - e + 1$ ,

所以  $f(x)$  无最小值, 即  $m - n$  无最小值;

当  $m > 0$  时, 由(2)得  $f'(x)$  只有一个零点  $x_0$ , 即  $e^{x_0} + 2mx_0 = 0$  且  $x_0 < 0$ ,

当  $x < x_0$  时,  $f'(x) < 0$ , 当  $x > x_0$  时,  $f'(x) > 0$ ,

所以  $f(x)$  在  $(-\infty, x_0)$  上单调递减, 在  $(x_0, +\infty)$  上单调递增,  $f(x)_{\min} = f(x_0) = e^{x_0} + mx_0^2 - e = n$ ,

此时  $m - n = m - e^{x_0} - mx_0^2 + e$ , 因  $e^{x_0} + 2mx_0 = 0$ , 所以  $m = -\frac{e^{x_0}}{2x_0}$ ,

代入得  $m - n = -\frac{e^{x_0}}{2x_0} - e^{x_0} + \frac{e^{x_0}}{2x_0} \cdot x_0^2 + e = \frac{1}{2}e^{x_0} \left( x_0 - \frac{1}{x_0} - 2 \right) + e$ ,

令  $\varphi(x) = \frac{1}{2}e^x \left( x - \frac{1}{x} - 2 \right) + e (x < 0)$ ,  $\varphi'(x) = \frac{e^x (x-1)^2 (x+1)}{2x^2} (x < 0)$ ,

当  $x < -1$  时,  $\varphi'(x) < 0$ , 当  $-1 < x < 0$  时,  $\varphi'(x) > 0$ ,

所以  $\varphi(x)$  在  $(-\infty, -1)$  上单调递减, 在  $(-1, 0)$  上单调递增,

$\varphi(x)_{\min} = \varphi(-1) = e - \frac{1}{e}$ , 此时  $m = \frac{1}{2e}$ ,  $n = \frac{3}{2e} - e$ ,

所以  $m - n$  的最小值为  $e - \frac{1}{e}$ . ..... (12 分)